

# К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБРАЗОВ В ГЕОМЕТРИИ

Олег А. Графский

Дальневосточный государственный университет путей сообщения

Как известно, в основаниях геометрии фундаментальную роль играют квадратичные формы (поверхности, кривые линии и их вырожденные виды), которые принимаются и как за модели плоскостей неевклидовых геометрий, и за соответствующий абсолют этих геометрий.

Обоснование введения бесконечно удаленных элементов, а затем мнимых элементов (в том числе и на многомерной основе) позволило классикам геометрии (в особенности Ф. Клейну) развить стройную теорию этой науки. При этом, если бесконечно удаленные элементы более удачно рассматриваются при введении проективных координат, то в интерпретациях мнимых элементов и соответствующих образов проводят, как правило, аналог с действительными образами. Поэтому определенный интерес представляют такие интерпретации, которые позволили бы наряду с действительными образами рассматривать и мнимые, и не раздельно, а совместно с ними.

Тогда такие интерпретации должны представлять и циклические (круговые) точки (абсолют геометрии Евклида), через которые проходят все окружности евклидовой плоскости; изотропные прямые линии (с проективной точки зрения – два пучка в центрах в круговых точках), а следовательно и несобственную прямую линию, которая проходит через обе круговые точки и является, таким образом, тоже изотропной [1]. При этом такая интерпретация должна способствовать моделированию окружностей 1-го и 2-го рода псевдоевклидовой геометрии (Г. Минковского), которые, как известно, рассматриваются как сопряженные равносторонние гиперболы (поскольку окружность нулевого рода представляется асимптотами этих гипербол – изотропными прямыми линиями). В трехмерном пространстве такая интерпретация должна сопровождаться наличием мнимой окружности сфер (общую для всех сфер), изотропного конуса и т. д. Так как геометрические построения должны подтверждаться аналитически, то в первую очередь необходимо обоснованное задание системы координат и структуры координатной плоскости, в которой рассматриваются геометрические объекты. Ввиду того, что координатная ось представляет собой числовую ось, как упорядоченную последовательность чисел, то формирование такой оси нужно производить с позиции алгебры.

Исходя из построения современной (абстрактной) алгебры, можно рассматривать такие известные математические модели, которые определяются в терминах бинарных операций. Эти операции связывают (ставят в соответствие) пары математических объектов с соответствующими результатами определяющих операций. Именно к моделям такого рода относят группы, кольца, поля и пр.

Согласно теории групп, имеет место так называемая циклическая группа, которая состоит из степеней  $a^0 = E$ ,  $a^1$ ,  $a^2$ , ... одного элемента  $a$  (такая группа обязательно коммутативна [2, 3]).

Естественно полагать, что в поле действительных чисел в качестве результата операции по умножению (как одной из основной арифметической операции) имеет место число

$a \cdot b$ , а при случае  $b = a$ , – число  $a \cdot a$  или  $a^2$  (т.е. имеется число  $a_1 = a \cdot a = a^2$ ). При выполнении этой же операции с парой чисел  $a \cdot a_1$ , получим следующий результат операции (число)  $a_2 = a \cdot a_1 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a = a^3$ . Аналогичным образом могут быть получены числа  $a_3 = a \cdot a_2 = a \cdot a^3 = a^4$ ;  $a_4 = a^5$  и т.д.

Таким образом, можно записать:

$$a_k = a \cdot a_{k-1} = a \cdot a^k = a^{1+k} = a^n,$$

где  $k$  и  $n$  – целые числа;  $k \geq 1$  – число операций по умножению;  $n = k + 1$  – итоговая степень числа (результата операции).

Поскольку поле комплексных чисел отличается от поля действительных чисел наличием мнимой единицы (числа  $i = \sqrt{-1}$ ), в первую очередь рассмотрим образование циклической группы с этим элементом (числом  $i$ ):  $i^0 = 1$ ;  $i^1 = i$ ;  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$  и т.д.

В данном случае имеется цикл кратный числу 4, так как  $i^{p+4} = i^p$ , где  $p$  является степенью числа  $i$ .

Запишем полученные результаты для степеней  $p(0; 1; 2; 3)$

числа  $i$  в виде числа  $a_{ik}$ :  $a_{i1} = i^0 = 1$ ;  $a_{i2} = i^1 = i$ ;  $a_{i3} = i^2 = -1$ ;  $a_{i4} = i^3 = -i$ . Сумма этих значений четырех чисел будет равна нулю:

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} = \sum_{k=1}^4 a_{ik} = \sum_{p=0}^3 i^p = 0$$

Если ввести понятие периода  $T$ , при котором сумма результатов четырех последовательных степеней чисел равна нулю, то, очевидно, вся последовательность  $n$  чисел  $a_{ik}$  (от  $a_{i1}$  до  $a_{in}$ ) может быть условно разбита на конечное целое число  $m$  периодов  $T$ . Число таких периодов  $m = n/4$ .

Отсюда следует, что величина  $n$  чисел  $a_{ik}$  для конечного числа периодов  $m$  будет определяться как  $n = 4m$ . Тогда сумма всех чисел  $n$ , входящих последовательно в каждый  $j$ -й период ( $T_j$ ) может быть записана выражением:

$$S_m = S_{T1} + S_{T2} + \dots + S_{Tm} = \sum_{j=1}^m S_{Tj} = m \sum_{k=1}^4 a_{ik} = \sum_{p=0}^{p_n} i^p = 0,$$

где  $p_n = n + 1$  – степень  $n$ -го (последнего) числа  $a_{in}$ .

Если рассматривать в качестве бинарной операции арифметическое умножение между упорядоченной последовательностью положительных чисел  $a_k$  и числа  $i^0$ , а затем ана-

логично между той же последовательностью  $a_k$  и числами  $i^1, i^2, i^3$ , то получим четыре последовательности следующих чисел ( $a_k \cdot i^p$ ): положительных и отрицательных действительных чисел  $a$  и  $-a$ , положительных и отрицательных мнимых чисел  $ai$  и  $-ai$ .

На основании полученных последовательностей ( $a_k \cdot i^p$ ) можно сформировать соответствующие числовые оси с общим началом координат (числом 0), так как это число имеется в каждой последовательности ( $a_k \cdot i^p$ ):

$$a_k \cdot i^0 = a_k(0, 1, 2, \dots, a, \dots, n);$$

$$a_k \cdot i^1 = a_k i(0, 1i, 2i, \dots, ai, \dots, ni);$$

$$a_k \cdot i^2 = -a_k(0, -1, -2, \dots, -a, \dots, -n);$$

$$a_k \cdot i^3 = -a_k i(0, -1i, -2i, \dots, -ai, \dots, -ni).$$

Эти числовые оси представлены на рис. 1, на которых отмечены значения чисел как координат:

$$(a_k \cdot i^0 = a_k) \subset Ox, \quad (a_k \cdot i^2 = -a_k) \subset -Ox,$$

$$(a_k \cdot i^1 = a_k \cdot i) \subset Ox_i, \quad (a_k \cdot i^3 = -a_k \cdot i) \subset -Ox_i.$$

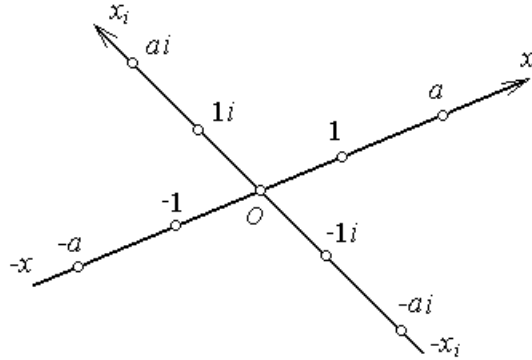


Рис. 1. Интерпретация числовых осей с числами  $a_k i^p$

При решении задач, в которых переменная обозначена, например как  $x$ , результаты решений будем записывать в виде выражений  $x = 0, x = 1, \dots, x = a$ . Это соответствует значениям координат на оси  $Ox$  (на положительной полуоси). В случае если переменные имеют мнимые значения  $x = i, x = 2i, \dots, x = ai$ , то этим значениям будут соответствовать точки на положительной полуоси числовой оси  $Ox_i$ . Аналогична интерпретация и для отрицательных действительных и мнимых значений переменной  $x$ , которой соответствуют координаты на отрицательных полуосях. При решении задач с несколькими переменными (например,  $x, y, z$ ), числовые оси обозначаются как  $Ox, Ox_i; Oy, Oy_i; Oz, Oz_i$  (в многомерной алгебраической геометрии переменные, как правило, обозначаются одним символом с индексами).

Обозначим построенные последовательности как  $(a_k i^p)^1$ , то есть это последовательности первой степени. Очевидно, можно сформировать последовательности и с другими значениями степеней:  $(a_k i^p)^2, (a_k i^p)^3, \dots, (a_k i^p)^q$ . Этим

самым вновь получаем циклическую группу, где первый элемент ( $q = 0$ ) равен единице:  $(a_k i^p)^0 = 1 = E$ . Для числовых последовательностей  $(a_k i^p)^q$  при значении  $q = 2$  ( $(a_k i^p)^2$  или  $a_k^2 i^{2p}$ ) сформированы две числовые оси  $Ou$  и  $Ov$  (рис. 2):

$$(a_k^2 \cdot i^0 = a_k^2) \subset Ou, \quad (a_k^2 \cdot i^2 = -a_k^2) \subset -Ou;$$

$$(a_k^2 \cdot i^4 = a_k^2) \subset Ov, \quad (a_k^2 \cdot i^6 = -a_k^2) \subset -Ov,$$

где  $a_k^2$  имеет значения  $0, 1, 2^2, \dots, a^2, \dots, n^2$ ;  $-a_k^2$  соответственно  $0, -1, -2^2, \dots, -a^2, \dots, -n^2$ .

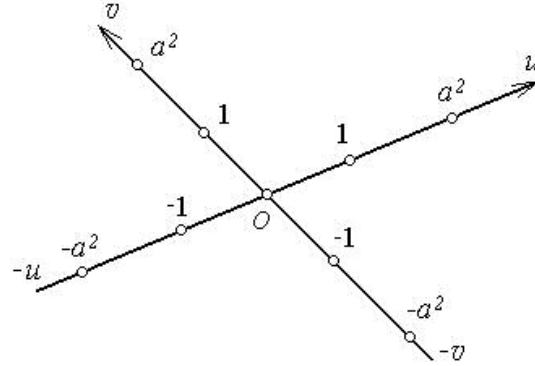


Рис. 2. Интерпретация числовых осей с числами  $(a_k i^p)^2$

Учитывая, что на осях фиксируются значения соответствующих переменных (координаты проекций точек), тогда на оси  $Ou$  каждая точка соответствует значению переменной  $u$  ( $u_1, u_2, \dots, u_a, \dots, u_n$ ). Из значения переменной  $u = a^2$  следует, что число  $a$  может принимать как положительные « $+a$ », так и отрицательные значения « $-a$ », т.е.  $u = (\pm a)^2$ , поэтому  $\sqrt{u} = \pm a$ , или  $x_1 = a$  и  $x_2 = -a$ . Откуда следует, что  $x = \pm\sqrt{u}$  и  $u = x^2$ .

Аналогично имеем для переменных оси  $Ov$  с координатами переменных  $v_1, v_2, \dots, v_a, \dots, v_n$ . Здесь  $v = (\pm a)^2$ . Принимая за « $y$ » числовые переменные числовых рядов первой степени, запишем  $y_1 = a$  и  $y_2 = -a$ , тогда  $y = \pm\sqrt{v}$ ,  $v = y^2$ . Для отрицательных значений переменных числовых рядов второй степени будут справедливы выражения:

$$u = ((\pm a)i)^2 = a^2 i^2 = -a^2; \quad \sqrt{u} = \pm\sqrt{-a^2} = \pm ai, \quad \text{тогда } x = \pm ai;$$

$$v = ((\pm a)i)^2 = a^2 i^2 = -a^2; \quad \sqrt{v} = \pm\sqrt{-a^2} = \pm ai, \quad \text{тогда } y = \pm ai.$$

Следовательно, положительным значениям переменной  $u$  соответствуют квадраты действительных положительных и отрицательных значений переменной  $x$ , а положительным значениям переменной  $v$  соответствуют квадраты действительных положительных и отрицательных значений переменной  $y$ . Эти значения откладываются на положительных полуосях соответственно оси  $Ou$  и оси  $Ov$ :

$$(\pm x)^2 = x^2 = u \quad \text{и} \quad (\pm y)^2 = y^2 = v.$$

Отрицательным значениям переменной  $u$  соответствуют квадраты мнимых положительных и отрицательных значений переменной  $x$ , а отрицательным значениям переменной  $v$  соответствуют квадраты мнимых положительных и отрицательных значений переменной  $y$ . Эти значения откладываются на отрицательных полуосях  $-Ou$  и  $-Ov$ :

$$(\pm xi)^2 = x^2 i^2 = -x^2 = -u; \quad (\pm yi)^2 = y^2 i^2 = -y^2 = -v.$$

В связи с этим, можно полагать, что координатная плоскость  $(Ouv)$ , задаваемая прямыми  $Ou$  и  $Ov$ , будет являться «квадратичной» плоскостью по отношению к координатной плоскости  $(Oxy)$ .

Таким образом, для рассматриваемых переменных (и как значениям координат точек на соответствующих координатных осях) справедливы следующие выражения:

$$T : x = \pm\sqrt{u}, \quad y = \pm\sqrt{v} \quad \text{и} \quad T^{-1} : u = x^2, \quad v = y^2, \quad (1)$$

Следовательно, взаимосвязь декартовых линейных координат любой точки  $A(x, y)$  действительной плоскости  $\pi_r(Oxy)$  с квадратичными координатами соответственной точки  $A_q(u, v)$  действительной плоскости  $\pi_q(Ouv)$  осуществляется выражениями (1) на основании которых можно записать:

$$tg\theta = tg^2\varphi, \quad (2)$$

где  $\varphi$  - угол наклона отрезка  $OA$  к оси  $Ox$ ;  $\theta$  - угол наклона отрезка  $OA_q$  к оси  $Ou$ .

Прежде чем устанавливать соответствие между точками  $A(x, y) \in \pi_r$  и  $A_q(u, v) \in \pi_q$  при совмещенном положении плоскостей  $\pi_r$  и  $\pi_q$  необходимо рассмотреть вопрос о наличии двойных (неподвижных) точек, то есть точек, которые бы не изменяли своего положения при рассматриваемом отображении. По выражению (1) установлено (согласно методу представленному в работе [4]), что в плоскости  $\pi_r$  имеют место четыре точки  $O(x=0, y=0)$ ;  $E_x(x=1, y=0)$ ;  $E_y(x=0, y=1)$ ;  $E_r(x=1, y=1)$ , которым при отображении на плоскость  $\pi_q$  соответствуют также четыре точки с теми же значениями координат. На основании этого заключаем, что при данном отображении неподвижными (двойными) точками являются  $O(0;0)$ ,  $E_u = E_x(1;0)$ ,  $E_v = E_y(0;1)$ ,  $E_q = E_r = E(1;1)$ . И как следствие этого – прямые линии с уравнениями  $x=1$  и  $y=1$ , отображаются также в аналогичные прямые  $u=1$ ,  $v=1$ .

Анализируя выражение (2) для первого квадранта плоскости  $\pi_r$ , отмечаем что еще положение трех прямых (лучей) остается неизменным: при значениях  $\varphi=0$  и  $\theta=0$  (совпадение положительных полуосей абсцисс); при значениях

$\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (совпадение положительных полуосей ор-

динат); при значениях  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  и  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (совпадение биссектрис I первого квадранта, которые проходят через неподвижные точки  $O$  и  $E$ ).

В обратной задаче точке  $A_q$  I квадранта плоскости  $\pi_q$  соответствуют в плоскости  $\pi_r$  четыре точки (по одной в каждом квадранте). Лучу  $OA_q$  с углом наклона  $\theta$  к оси абсцисс ( $Ou$ ) I квадранта плоскости  $\pi_q$  соответствуют в плоскости  $\pi_r$  четыре луча с углами наклона к оси абсцисс ( $Ox$ ):  $\varphi$ ;  $\pi - \varphi$ ;  $\pi + \varphi$ ;  $-\varphi$ . Это соответствие вытекает согласно выражению (2), из которого следует  $tg\varphi = \pm\sqrt{tg\theta}$ .

Исследуемое отображение является одно-четырёхзначным соответствием, а полученная «квадратичная плоскость»  $Ouv$  своими квадрантами интерпретирует четырехлистную модель. При этом квадратичная функция в простейшем случае в виде параболы  $y = x^2$  (и  $y^2 = x$ ) с параметром  $p=1/2$  координатной плоскости  $Oxy$  отображается в плоскости  $Ouv$  также параболой  $v = u^2$  (и  $v^2 = u$ ) с «полуветвями» в первом квадранте, проходящими через неподвижные точки  $O$  и  $E$ . Параболы мнимых пространств отображаются в «полуветви» таких же парабол других квадрантов. Поэтому в рассматриваемых отображениях параболу можно считать инвариантной кривой.

Построение точки  $A_q \in \pi_q$  по заданной точке  $A \in \pi_r$  (точка  $A$  соответствует точке  $A_q$ ) можно осуществить на основании инверсии координат точки  $A$ , рассматриваемых как точки принадлежащие соответствующим координатным осям. Запишем выражение  $u = x^2$  в инверсионном виде:  $u = \frac{x^2}{1}$ . Тогда координата  $u$  точки  $A_q$  при совмещении плоскостей  $\pi_r$  и  $\pi_q$  будет определена при помощи окружности  $r_x = x$  и «единичной» точки на оси  $Ox$  ( $x=1$ ). Построение квадратичной координаты  $u = a^2$  по исходной координате  $x = a$  представлено на рис. 3,  $|a| < 1$ .

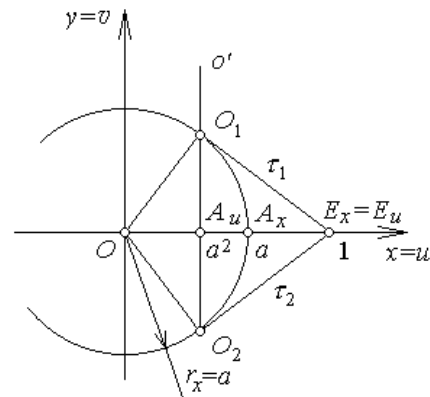


Рис.3. Построение квадратичной координаты  $u = a^2$  ( $|a| < 1$ )

Аналогично (рис.4) осуществляются построения для определения квадратичной координаты  $v = b^2$  по исходной координате  $y = b$  ( $|b| > 1$ ), если выражению  $v = y^2$  придать

также инверсионный вид:  $v = \frac{y^2}{1}$ .

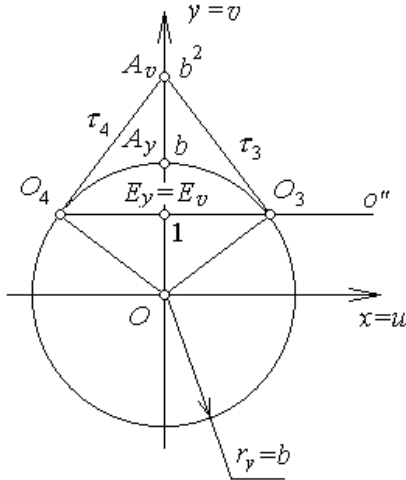


Рис.4. Построение квадратичной координаты  $v = b^2$  ( $|b| > 1$ )

Анализируя представленные построения можно заключить, что квадратичные координаты определяются как точки пересечения соответствующих осей координат либо с прямыми  $o'$  и  $o''$  ( $a$  и  $b$  по абсолютной величине меньше единицы), либо с касательными  $\tau_1, \tau_2$  и  $\tau_3, \tau_4$ , проведенными через точки  $O_1, O_2$  и  $O_3, O_4$  ( $a$  и  $b$  по абсолютной величине больше единицы).

Во всех представленных случаях (рис. 3, 4) рассматривались только положительные координаты точки  $A \in \pi_r$  (предполагалась, что точка  $A$  находилась в I квадранте плоскости  $\pi_r$ ).

Если рассматривать точку  $A \in \pi_r$  в любом другом квадранте, то искомая точка  $A_q \in \pi_q$  также будет находиться в I квадранте плоскости  $\pi_q$ , поскольку аналитически для действительных положительных и отрицательных значений координат  $x$  и  $y$  точки  $A$  соответствуют только положительные действительные значения координат  $u = x^2$  и  $v = y^2$  точки  $A_q$ .

Таким образом, точке  $A_q \in \pi_q$  в плоскости  $\pi_r$  будут соответствовать четыре точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (каждая в соответствующем квадранте плоскости  $\pi_r$ ).

Если будет дана точка  $A_q \in \pi_q$ , расположенная в каком-либо другом квадранте, то ей соответственные четыре точки будут располагаться в других координатных плоскостях (табл. 1), которые содержат хотя бы одну координатную ось с мнимыми значениями координат.

Таблица 1. Координаты соответственных точек

Координаты точки	Квадранты плоскостей			
	I	II	III	IV
$A_q \in \pi_q$	точка $A_1$	точка $A_2$	точка $A_3$	точка $A_4$
I квадрант $u = a^2$ $v = b^2$	Координатная плоскость $\pi_r$			
	$x = a$ $y = b$	$x = -a$ $y = b$	$x = -a$ $y = -b$	$x = a$ $y = -b$
II квадрант $u = -a^2$ $v = b^2$	Координатная плоскость $\pi_{ir}$			
	$x = ia$ $y = b$	$x = -ia$ $y = b$	$x = -ia$ $y = -b$	$x = ia$ $y = -b$
III квадрант $u = a^2$ $v = -b^2$	Координатная плоскость $\pi_{ri}$			
	$x = a$ $y = ib$	$x = -a$ $y = ib$	$x = -a$ $y = -ib$	$x = a$ $y = -ib$
IV квадрант $u = -a^2$ $v = -b^2$	Координатная плоскость $\pi_i$			
	$x = ia$ $y = ib$	$x = -ia$ $y = ib$	$x = -ia$ $y = -ib$	$x = ia$ $y = -ib$

Анализ установленной зависимости между полярными радиусами  $\rho_\varphi \in \pi_r$  и  $\rho_\theta \in \pi_q$ :

$$\rho_\theta = \frac{\rho_\varphi^2}{\cos \theta + \sin \theta} \quad (3)$$

позволят утверждать, что данное выражение представляет собой инверсионную зависимость:

$$\rho_\theta = \frac{\rho_\varphi^2}{\rho_e} \quad (4)$$

Числитель выражения (4) можно рассматривать как окружность  $s_r$ ,

$$\rho_\varphi^2 = r^2 \text{ (или } x^2 + y^2 = r^2), \quad (5)$$

а знаменатель

$$\rho_e = \cos \theta + \sin \theta, \quad (6)$$

как окружность ( $u^2 + v^2 - u - v = 0$ ), которая проходит через начало координат, единичные точки координатных осей и единичную точку плоскости. В канонической форме уравнение этой окружности ( $s_e$ ) имеет следующий вид:

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2. \quad (7)$$

В целом выражение (3) является уравнением прямой линии ( $l_q$ ):

$$u + v = r^2. \quad (8)$$

Уравнение окружности  $s_e$  (6) показывает, что эта окружность является постоянным геометрическим образом плоскости  $\pi_q$  для всех концентрических окружностей  $s_r$  (5) плоскости  $\pi_r$  с общим центром в начале координат  $O$  ( $x = 0; y = 0$ ) и соответствующим им прямым параллельным линиям  $l_q$  вида (8) плоскости  $\pi_q$ .

Можно также констатировать, что в эту окружность ( $s_e$ ) отображаются все прямые линии  $l_q$  (8) при выполнении инверсии всех ее точек относительно окружности  $s_r$  (кроме прямой, проходящей через начало координат). Это положение справедливо на основании того, что выражение (4) можно записать

$$\rho_e = \frac{r^2}{\rho_\theta} . \quad (9)$$

Пример построения точки  $A \in l_q$  соответствующей точке  $A_1 \in S_e$  показан на рис. 5 ( $\rho_e = OA_1$ ,  $\rho_\theta = OA$ ).

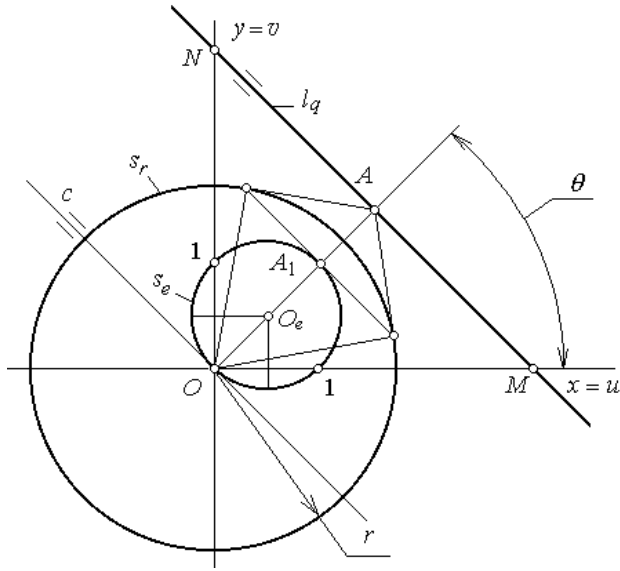


Рис. 5. Пример построения соответственных точек  $A \in l_q$  и  $A_1 \in s_e$

Бесконечно удаленным точкам прямой  $l_q$  будет соответствовать точка окружности  $s_e$ , расположенная в начале координат ( $O$ ). Такой случай можно наблюдать графически и аналитически по выражению (9), так как луч ( $c$ ), на котором определяются точки при выполнении инверсии будет проходить через точку  $O(0;0)$  параллельно прямой  $l_q$  (8), что

соответствует углу наклона  $\theta_o = \frac{3}{4}\pi$  (или  $\theta_o = -\frac{\pi}{4}$ ) луча

( $c$ ) с осью. Этим значения угла соответствуют в выражении

$$(3) \cos \frac{3}{4}\pi = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{3}{4}\pi = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Поэтому знаменатель выражения (3) обращается в ноль, а  $\rho_\theta = \infty$ . Бесконечно удаленные точки прямой  $l_q$  будут соответствовать циклическим (круговым) точкам, так как проведенный в плоскости  $\pi_q$  под углом  $\theta_o$  луч ( $c$ ) соответствует изотропным прямым плоскости  $\pi_{ir}(Ox_iy)$  и плоскости  $\pi_{ri}(Oxy_i)$ .

Таким образом, той части окружности  $s_e$ , которая расположена в I квадранте плоскости  $\pi_q$  соответствует часть прямой  $l_q$ , расположенной также в I квадранте (отрезок  $MN$ ). Этому отрезку в плоскости  $\pi_r(Oxy)$  соответствует окружность (5):  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Дуге окружности  $s_e$ , которая расположена в II квадранте в плоскости  $\pi_q$  соответствует часть прямой  $l_q$ , простирающаяся от точки  $M$  также во II квадранте. Этой части прямой (лучу с началом в точке  $M$ ) соответствует в плоскости  $\pi_{ir}(Ox_iy)$  равносторонняя гиперболы

$$y^2 - x_i^2 = r^2 . \quad (10)$$

Другой дуге окружности  $s_e$ , расположенной в IV квадранте, соответствует та часть прямой  $l_q$ , которая расположена также в IV квадранте (луч с началом в точке  $N$ ). Этому лучу соответствует в плоскости  $\pi_{ri}(Oxy_i)$  другая равносторонняя гиперболы

$$x^2 - y_i^2 = r^2 . \quad (11)$$

Полученную аналитическим путем окружность  $s_e$  можно рассматривать как множество точек, которое подчинено уравнению (6) или уравнениям (3) и (7). Одна точка этого множества совпадает с началом координат. Таким образом, эта точка находится одновременно во всех квадрантах плоскости  $\pi_q$ . В III квадранте это будет одна единственная точка, принадлежащая окружности  $s_e$ . Поэтому окружность  $s_e$  отобразится в плоскость  $\pi_i(Ox_iy_i)$  только одной своей точкой, совпадающей также с началом координат плоскости  $\pi_i$ . Дуге окружности  $s_e$ , расположенной в I квадранте (ее длина равна половине длины всей окружности) соответствует в плоскости  $\pi_r(Oxy)$  кривая четвертого порядка  $s'_{Ie}$

$$x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 0 , \quad (12)$$

которая представлена на рис. 6.

Кривая  $s'_{Ie}$  состоит из двух частей: одна часть это построенная замкнутая кривая линия, которая симметрична относительно осей координат, начала координат и биссектрис координатных углов; другая ее часть состоит из одной изолированной точки (считаемая дважды), которая совпадает с началом координат.

Дуге окружности  $s_e$ , расположенной во II квадранте (ее длина равна четверти длины всей окружности) соответствует в плоскости  $\pi_{ir}(Ox_iy)$  кривая четвертого порядка  $s'_{IIe}$

$$x_i^4 + x_i^2 + y^4 - y^2 = 0 , \quad (13)$$

которая изображена на рис. 7. Эта кривая симметрична относительно осей координат и имеет одну узловую точку (считаемую дважды), совпадающую с началом координат.

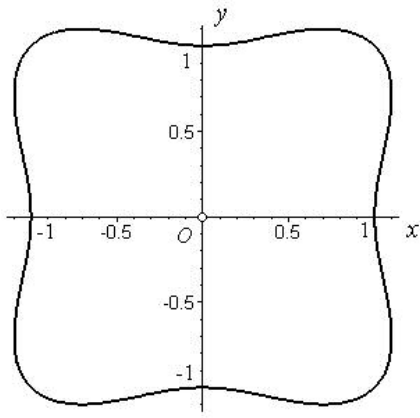


Рис. 6. Кривая четвертого порядка  $s'_{Ie}$  плоскости  $\pi_r(Oxy)$

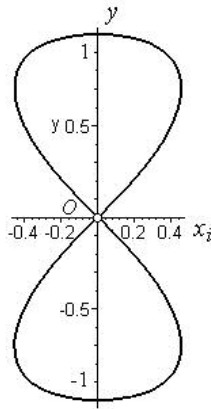


Рис. 7. Кривая четвертого порядка  $s'_{IIe}$  плоскости  $\pi_{ir}(Ox_i y_i)$

Другая дуга окружности  $s_e$ , которая расположена в IV квадранте плоскости  $\pi_q$  (ее длина равна также четверти длины всей окружности) соответствует в плоскости  $\pi_{ri}(Oxy_i)$  кривая четвертого порядка  $s'_{IVe}$

$$x^4 - x^2 + y_i^4 + y_i^2 = 0. \quad (14)$$

Эта кривая изображена на рис. 8, она также симметрична относительно осей координат и имеет одну узловую точку (также считаемую дважды), совпадающую с началом координат.

Визуализация представленных кривых осуществлялась с использованием пакета Maple. Разработан и способ построения каждой точки этих кривых. Так, например, установлено, что построение точек кривой  $s'_{IIe}$  (рис. 9) подчинено условию конгруэнтности двух пучков  $(a, b, \dots, c)$  и  $(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{c})$ , проходящих через начало координат. В этом случае имеет место ортогональная инволюция, которая является эллиптической инволюцией прямых пучка (O).

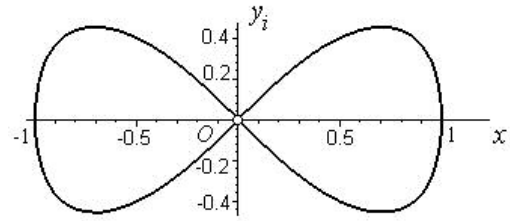


Рис. 8. Кривая четвертого порядка  $s'_{IVe}$  плоскости  $\pi_{ri}(Oxy_i)$

При анализе отображения окружности  $s_r \subset \pi_r$  в прямую линию  $l_q \subset \pi_q$  установлены три типа соответствий: гиперболический (прямая и окружность имеют две общие соответственные различные действительные точки:  $A = E_x = E_u$  и  $B = E_y = E_v$ ), параболический (прямая и окружность имеют две соответственные совпавшие действительные точки:  $A = B = E$ ), эллиптический (прямая и окружность не имеют общих соответственных точек).

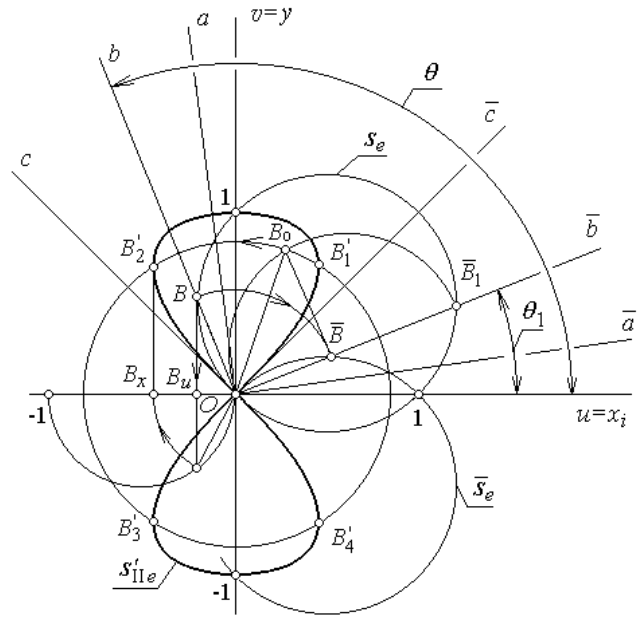


Рис. 9. Построение кривой четвертого порядка  $s'_{IIe}$

Анализ проводился на основе теории функций комплексной переменной:  $w = f(z)$ , где  $z = x + iy$ , а  $w = u + iv$ . Это равносильно заданию двух функций:  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  [5]. Так как в рассматриваемых отображениях (1)  $u = x^2, v = y^2$ , то законом отображения является выражение

$$w = z^2 \frac{\cos^2 \varphi + i \sin^2 \varphi}{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}$$

$$\text{или } w = z^2 e^{-2i\varphi} (\cos^2 \varphi + i \sin^2 \varphi),$$

которые для построения на чертеже (рис. 10) удобнее записать как

$$w = |z|^2 (\cos^2 \varphi + i \sin^2 \varphi). \quad (16)$$

Этот анализ предоставил возможность построения точки  $A_q \in \pi_q$  (как комплексного числа  $w_A \in \pi_w$ ) по заданной точке  $A_r \in \pi_r$  (как комплексного числа  $z_A \in \pi_z$ ). Построения осуществляются в четыре этапа. На первом этапе на единичной окружности определяется точка  $A_E (x = \cos \varphi, y = \sin \varphi)$ :  $z_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ . На втором этапе при помощи двух инверсий (вдоль осей координат) определяется точка  $A^* (x_* = \cos^2 \varphi, y_* = \sin^2 \varphi)$ :

$$z_* = x_* + iy_* = \cos^2 \varphi + i \sin^2 \varphi$$

или  $z_* = u_* + iv_* = |z_*| \cdot e^{i\theta} = w_*$

На третьем этапе определяется точка  $A_e$  (как результат пересечения прямой  $OA^*$  с окружностью  $s_e$ ), для которой  $\rho_e = \cos \theta + i \sin \theta$  (6):

$$w_e = |\cos \theta + i \sin \theta| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{e^{2i\theta} + i}{1 + i}. \quad (17)$$

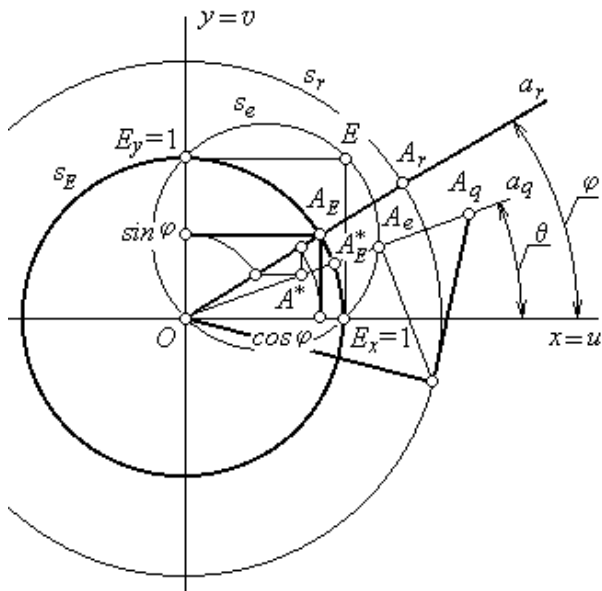


Рис. 10. Построение соответственных точек на основе теории функций комплексного переменного

На четвертом этапе выполняется инверсия по определению

$$\text{искомой точки } A_q (w_A): w_A = \frac{|z_A|^2}{w_e}$$

Выполняя обобщение декартовых координат [1, 4], перейдем к проективным координатам плоскости  $\pi_q(Ouv)$ . На рис. 12 представлен известный базисный (координатный) треугольник  $(\Delta OUV)$ , который в качестве вершин имеет начало координат  $O$  и пару точек  $U \in l_\infty, V \in l_\infty$ , где  $l_\infty$  является несобственной прямой плоскости  $\pi_q(Ouv)$ .

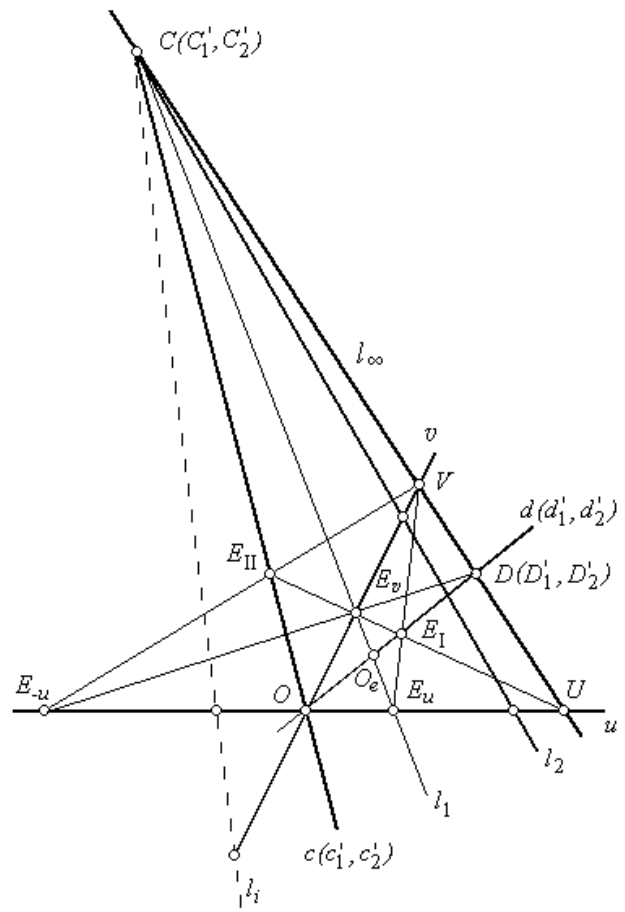


Рис. 12. Проективная плоскость  $\pi_q(Ouv)$

Через произвольно выбранную в I квадранте единичную точку  $E_I$  определяются единичные точки  $E_u$  и  $E_v$  на координатных осях  $Ou$  и  $Ov$  ( $E_u = VE_I \cap Ou$ ,  $E_v = UE_I \cap Ov$ ) и проводится «биссектриса»  $d(d'_1, d'_2)$  – образы биссектрис всех квадрантов плоскости  $\pi_r$ ). На продолжении прямой  $DE_v$  до пересечения с отрицательной полуосью  $Ou$  определяется единичная точка  $E_{-u}$ . А на пересечении прямых линий  $VE_{-u}$  и  $UE_v$  отмечается единичная точка  $E_{II}$  II квадранта плоскости  $\pi_q$ . Тогда прямая линия, проходящая через начало координат ( $O$ ) и единичную точку  $E_{II}$ , будет являться «биссектрисой» ( $c$ ) II квадранта плоскости  $\pi_q$ , а  $c'_1$  и  $c'_2$  – образами биссектрис плоскости  $\pi_{ir}(Ox_iy)$ , которые являются изотропными прямыми. Следовательно, точка  $C = c \cap l_\infty$  является таковой точкой несобственной прямой  $l_\infty$ , которая отображает точки  $C'_1, C'_2$  как образы циклических (круговых) точек.

Представленная модель наглядно иллюстрирует положение о том, что все окружности проходят через пару циклических точек. Так на прямой  $l_1$  отрезку  $E_u E_v$  соответствует «еди-

ничная окружность» ( $r = 0$ ) плоскости  $\pi_r$  ( $Oxy$ ). При этом на всех прямых, проходящих через точку  $C$  можно выделить отрезки заключенные между осями  $Ou$  и  $Ov$  (для сравнения отрезок  $MN$  прямой  $l_q$  на рис. 5). Эти отрезки и являются концентрическими окружностями плоскости  $\pi_r$  (например, окружность  $s_r$  на рис. 5). Окружность нулевого радиуса также проходит через эти точки (ей соответствует прямая, проходящая через начало координат  $O$  и точку  $C$ , т.е. на прямой  $c(c'_1 \cap c'_2)$  отрезок, заключенный между осями координат  $Ou$  и  $Ov$ , имеет длину равную нулю).

Мнимые окружности (радиуса  $ir$ ) также проходят через циклические точки. Это отрезок прямой  $l_i \supset C$ , заключенный между отрицательными полуосями осей координат  $Ou$  и  $Ov$ .

Пара противоположно направленных лучей, исходящих из концов рассмотренных отрезков (например, из  $E_u$  и  $E_v$ ) и простирающихся во II и IV квадранты являются сопряженными равносторонними гиперболами, которые можно принять за модели окружностей псевдоевклидовой геометрии Г. Минковского; окружность нулевого рода (инцидентна изотропным прямым) на данной схеме представляется прямой  $c(c'_1 \cap c'_2)$ . Не трудно заметить, что на несобственной прямой линии  $l_\infty$  устанавливается эллиптическая инволюция точек  $V, U$  и  $C, D$ . Это гармоническая четверка точек:  $(UVDC) = -1$ . Этот факт подтверждается наличием полного четырехугольника, например,  $OE_u E_1 E_v$ , где несобственная прямая линия  $l_\infty$  является одной из его диагоналей. Такая инволюция точек несобственной прямой называется абсолютной инволюцией [4]. Ее можно рассматривать и как ортогональную. Тогда отмеченные выше окружности псевдоевклидовой геометрии можно интерпретировать в евклидовой плоскости. Это будут пучки исходящие из точки  $D$ . Точка  $D$ , как и все точки прямой  $l_\infty$  считается двойной; она является образом двух точек  $D'_1$  и  $D'_2$ , которые являются абсолютном псевдоевклидовой геометрии. Поэтому прямые пучков с центрами  $C$  и  $D$  в общем случае это окружности и гиперболы плоскостей  $\pi_r$ ,  $\pi_{ir}$ ,  $\pi_{ri}$  и  $\pi_i$ , а биссектрисы плоскостей  $\pi_{ir}$  и  $\pi_{ri}$  являются общими изотропными прямыми линиями. Прямые пучков с центрами  $U$  и  $V$  являются соответственно горизонтальными и вертикальными прямыми линиями плоскостей  $\pi_r$ ,  $\pi_{ir}$ ,  $\pi_{ri}$  и  $\pi_i$ .

Если проследить за процессом вращения прямой (например,  $l_1$ ) вокруг точки  $C$ , а также вокруг точек  $E_u$  и  $E_v$ , вокруг точек  $E_1$  и  $O_e$ , можно рассмотреть постепенное превращение одних геометрических образов второго порядка в другие [1]. Например, при повороте прямой  $l_1$  вокруг точки  $E_u$  обнаруживаем постепенную деформацию окружности радиуса  $r=1$  (диаметра  $2r$ ) плоскости  $\pi_r$  в эллипс со значением малой оси равной  $2r$ , другая ось увеличивается и при прохождении прямой  $l_1$  через точку  $V$  эллипс превращается в пару параллельных прямых линий. Эти прямые линии можно принять за модель окружности геометрии Галилея (абсолютно

том которой является несобственная прямая  $l_\infty$  с выделенной точкой  $V$  на ней [6, 7]). При дальнейшем повороте прямой  $l_1$  полученные параллельные прямые линии превращаются в гиперболы и, при прохождении  $l_1$  через точку  $D$ , получаем в плоскости  $\pi_r$  равностороннюю гиперболу (модель окружности 1-го рода псевдоевклидовой геометрии). В дальнейших исследованиях при переходе к трехмерному пространству  $R_3$  рассматривается система двух плоскостей проекций  $\pi_{1q}(Ouv)$  и  $\pi_{2q}(Ouw)$ , которые имеют геометрический аппарат рисунка 12 (в каждой плоскости имеется несобственная прямая  $l_{1\infty}$  и  $l_{2\infty}$  с точками  $C_1, D_1$  и  $C_2, D_2$  соответственно). При введении третьей плоскости  $\pi_{3q}(Ovw)$  в I октанте построим единичный треугольник следов  $(\Delta E_u E_v E_w)$  плоскости  $s_{1q}$ . Плоскости этого треугольника в первом октанте действительного пространства  $R_3(Oxyz)$  соответствует сфера ( $r=1$ ) с центром в начале координат. Эта же плоскость проходит через точки  $C_1$  и  $C_2$  (как и все плоскости пучка плоскостей проходящие через эти точки). Тогда ось этого пучка, заключенная между двумя точками  $C_1$  и  $C_2$  является мнимой окружностью всех сфер.

Прямые  $d$  и  $c$  можно рассматривать как образующие кругового конуса  $k$  ( $Ou$  – ось вращения). Тогда полость  $k_c$  конуса  $k$  с отрицательной полуосью интерпретирует изотропный конус.

При соответствующих вращениях плоскости  $s_{1q}$  вокруг одного из ее следов можно рассматривать взаимные превращения квадрик [1], которые можно рассматривать как модели плоскостей остальных шести метрических неевклидовых геометрий.

#### Литература

1. Ф. Клейн. Неевклидова геометрия. – М.-Л.: Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР. Главная редакция общетехнической литературы и номенклатуры, 1936. – 355 с.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1999. – 368 с.
3. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 4-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1977. – 832 с.
4. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. – 8 изд. – М.: Просвещение, 1969. – 368 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 2-е изд. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958. – 678 с.
6. Каган В.Ф. Основания геометрии. – Ч. 2. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 344 с.
7. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 744 с.