

# Моделирование поведения ткани на твердом многогранном объекте

Владимир Д. Фроловский, Наталья Н. Газизова  
Новосибирский Государственный Технический Университет

Новосибирск, Россия

## Аннотация

В работе на основе метода частиц с учетом деформационных свойств ткани разработан алгоритм и программы для моделирования поведения ткани на поверхности твердого многогранного объекта. Приведены результаты моделирования и оценка деформаций ткани в результате наложения ткани на поверхность манекена.

**Ключевые слова:** моделирование ткани, метод частиц, энергетические функции, физические свойства ткани.

## Введение

Интерес к этой проблеме объясняется появлением спроса на системы, реализующие такие задачи, как компьютерный дизайн помещений, моделирование драпировки мебели, оконных проемов, моделирование тканевых декораций, одежды и виртуального подиума. Моделирование поведения ткани при драпировке появилось в списке компьютерных приложений сравнительно недавно. Как будет выглядеть ткань с определенными свойствами на определенном объекте? Как с изменением свойств ткани изменяется ее драпировка? Ответы на эти и другие вопросы в наглядной форме и должно давать компьютерное моделирование ткани.

## 1. Деформационные свойства ткани

Ткань - сложный механизм. В ткани тонкие волокна скручены в нити, и эти нити более или менее жестко сплетены во взаимосвязанную сеть. Все компоненты сети держатся вместе просто трением.

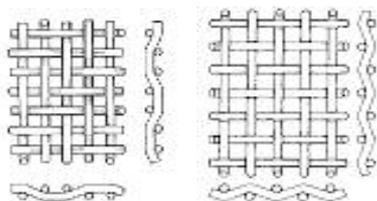


Рис. 1. Примеры структур ткани

Поведение их зависит от типа волокна, веса волокна, плотности сплетения, типа сплетения и т.д. Представим модель ткани как систему частиц которые размещены в точках пересечения продольных и поперечных нитей ткани.

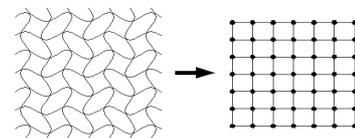


Рис. 2. Дискретная модель ткани

В этих точках происходит несколько взаимодействий. Сила сжатия волокон друг другом настолько большая, что нити прочно фиксируются в точках пересечения, обеспечивая оси для изгиба. Другие взаимодействия такие, как растяжение, могут быть выражены как смещения частиц, которые мы определили. Существует три типа ребер, определяющих взаимодействие между узлами сетки: 1) ребра, стягивающие по прямой и определяющие деформации растяжения-сжатия; 2) ребра, стягивающие по диагонали и определяющие деформации сдвига; 3) ребра, определяющие изгиб [1].

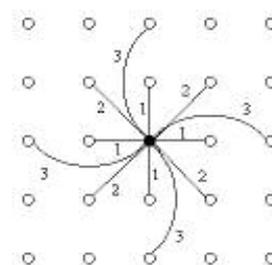


Рис. 3. Типы деформируемых ребер

В этой модели, с помощью функций энергии, дающих простые геометрические соотношения между находящимися в непосредствен-

ной близости частицами, можно описать взаимодействия, происходящие на уровне нити и ограничения, определяющие физические свойства ткани. Общая энергия деформаций ткани может быть определена как [3]:  $E_o = E_p + E_{сж} + E_{сдв} + E_u$ , где  $E_p$  - энергия растяжения;  $E_{сж}$  - энергия сжатия;  $E_u$  - энергия изгиба;  $E_{сдв}$  - энергия сдвига. Рассмотрим энергетические составляющие и получим математическую формулу для каждой из них.

1. Энергия растяжения определяется законом Гука, а энергия сжатия вводится для предотвращения самопересечения ткани.

2. Энергия изгиба обусловлена изгибом нитей относительно плоскости окружающей ткани [2]. Энергия изгиба:  $B = \mu_u \cos^2(\theta/2) N m$ , где  $\theta$  - угол изгиба,  $\mu_u$  - линейный коэффициент изгиба (для 100% хлопка  $\mu_u = 0.214 \cdot 10^{-4}$ ).

3. Энергия сдвига обусловлена изгибом вокруг нити в плоскости пересечения. Эта часть энергии обуславливает S - форму нити. На макроскопическом уровне это - сдвиг, имеющий место в ткани. Энергия сдвига:

$T = \mu_{сдв} \frac{l_1 l_2}{2} \phi^2 N m$ , где  $\mu_{сдв}$  - линейный коэффициент сдвига (для 100% хлопка  $\mu_{сдв} = 1,9576$ ),

$l_1, l_2$  - смежные ребра деформируемой ячейки,  $\phi$  - угол сдвига в градусах. Энергетические функции, которые мы определили, это только предположения. Но даже их использование с интуитивно выбранными количественными зависимостями может давать очень удовлетворительные результаты при моделировании ткани. Для представления конкретной ткани нужно построить эти функции энергии, основываясь на существующих измерительных системах физических свойств тканей. Примером такой измерительной системы может служить система Kawabata [2]. Система Kawabata - это стандартное оборудование для измерения физических и механических свойств конкретного тканого материала. Результаты этих измерений дают возможность опреде-

лять количественные соотношения, выражающие физическое поведение тканей, классифицировать и устанавливать существенные свойства различных тканей. Систему Kawabata можно использовать для измерения свойств, характеризующих изгиб, сдвиг и растяжение ткани. При определении свойств на изгиб, сдвиг и растяжение, оборудование измеряет, сколько силы требуется для выполнения трех видов деформации на образце ткани стандартного размера и формы. Система строит графики каждой силы как функции некоторого геометрического параметра типа угла, длины и т.д. Точная процедура предусматривает математическую подгонку кривой к измеренным данным и т.д. Будем полагать, что мы знаем окончательные уравнения кривой.

## 2. Математическая модель

Имеется ткань, представляющая собой совокупность узлов (точек), которая осуществляет движение относительно устойчивой равновесной формы. В начальный момент времени расположение всех узлов и объекта в пространстве известно. Движение системы описывается обобщенными перемещениями, и на каждом временном слое ищутся положения узлов  $r_{ij}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  в пространстве. Таким образом, ткань будет представлять собой механическую систему с тремя степенями свободы, которая осуществляет движение относительно устойчивой равновесной формы. Движение системы опишем в обобщенных перемещениях  $r_{ij}(t)$ , которые равны нулю в положении равновесия. Тогда потенциальную энергию  $V$  можно выразить через эти перемещения, а кинетическую энергию  $T$  и функцию рассеяния  $D$  представить квадратичными формами обобщенных скоростей  $r'_{ij}(t)$ . Согласно принципу Гамильтона уравнение движения

системы есть уравнение Эйлера-Лагранжа для функ-

$$\text{ционала } J(r_{ij}) = \int_0^{t_1} (T - U) dt = \int_0^{t_1} L dt :$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r'_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial r'_{ij}} = \frac{\partial T}{\partial r_{ij}} - \frac{\partial U}{\partial r_{ij}},$$

где  $T = m_{ij}(r'_{ij})^2 / 2$  – кинетическая энергия,

$U = -m_{ij}r_{ij}a_{ij}$  – потенциальная энергия,  $L = T - U$  –

функция Лагранжа,  $m_{ij}$  – масса узла,  $a_{ij} = d^2r_{ij} / dt^2$  –

ускорение точки,  $r_{ij}(t)$  – положение узла в момент

времени  $t$ . Учитывая обобщенную внешнюю силу

$f = f_{ij}(t)$ , которая для каждой координаты может

быть активной силой, получим систему дифференци-

альных уравнений в матричном виде относительно мат-

рицы- столбца  $r = \{r_{ij}\}$  следующим образом:

$$[M]\{r''\} + [C]\{r'\} + [K]\{r\} = \{f\}, \quad (1)$$

где матрица инерции (матрица масс)  $[M]$ , матрица

демпфирования  $[C]$  и матрица жесткости  $[K]$  явля-

ются симметричными. Разрешив уравнение (1) относи-

тельно  $r''$  и сгруппировав в правой части все силы,

действующую на систему частиц, получим полное диф-

ференциальное уравнение:

$$r'' = M^{-1}F(r, r'), \quad (2)$$

где  $M$  – диагональная матрица, описывающая распреде-

ление масс ткани,  $F(r, r')$  – функция, описывающая

действие внутренних и внешних сил на ткань. Началь-

ные условия:  $r|_{t_0=0} = r_0, r'|_{t_0=0} = 0, f_{внутр t_0=0} = 0, ;$

краевые условия:  $r'|_S = 0$ , где  $S$  – поверхность твердого

тела. Преобразуем систему уравнений (2) в систему

дифференциальное уравнение 1-го порядка. Обозначив

$v = r'$ , можно записать:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ M^{-1}F(r, v) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Для простоты положим, что

$$r(t_0) = r_0, v(t_0) = v_0,$$

$$\Delta r = r(t_0 + h) - r_0, \Delta v = v(t_0 + h) - v_0$$

Тогда применение явного метода к уравнению

(3) приведет к следующему уравнению:

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta v \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v \\ M^{-1}F(r_0, v_0) \end{pmatrix}, \text{ где шаг } h \text{ – дол-}$$

жен быть достаточно малым по величине.

Применение неявного (обратного) метода

аппроксимации приводит к уравнению:

$$\begin{pmatrix} \Delta r_{ij}(t) \\ \Delta v_{ij}(t) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v_{ij}(t) + \Delta v_{ij}(t) \\ M^{-1}F(r_{ij}(t_0) + \Delta r_{ij}(t), \\ v_{ij}(t_0) + \Delta v_{ij}(t)) \end{pmatrix}$$

Метод называется “обратным”, поскольку

он стартует из состояния

$(r_{ij}(t_0) + \Delta r_{ij}(t), v_{ij}(t_0) + \Delta v_{ij}(t))$  и ис-

пользует шаг явного метода для возврата сис-

темы обратно во временной области. Обратный

метод требует нахождения величин  $\Delta r$  и  $\Delta v$ ,

удовлетворяющих уравнению. Уравнение не

линейно, поэтому применяется разложение  $F$  в

ряд Тейлора и выполняется аппроксимация 1-

го порядка:

$$F(r_{ij}(t_0) + \Delta r_{ij}, v_{ij}(t_0) + \Delta v_{ij}) = \\ F_0 + \frac{\partial F}{\partial r} \Delta r_{ij} + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v_{ij}$$

В этом уравнении производные  $\frac{\partial F}{\partial r}$  и  $\frac{\partial F}{\partial v}$

вычисляются для состояния  $(r_{ij}(t_0), v_{ij}(t_0))$ .

Использование этой подстановки приводит к

системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta v \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v + \Delta v \\ M^{-1}(F_0 + \frac{\partial F}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v) \end{pmatrix}$$

Подставив в нижнюю строку системы

$\Delta r_{ij}(t) = h(v_{ij}(t_0) + \Delta v_{ij}(t))$ , получим

$$\Delta v_{ij}(t) = hM^{-1}(F_0 + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v_{ij}(t) + \frac{\partial F}{\partial r} h(v_{ij}(t_0) + \Delta v_{ij}(t)))$$

Обозначим за  $I$  – единичную матрицу и, перегруппировав отдельные составляющие, получим уравнение

$$(I - hM^{-1} \frac{\partial F}{\partial v} - h^2 M^{-1} \frac{\partial F}{\partial r}) \Delta v_{ij}(t) = hM^{-1}(F_0 + h \frac{\partial F}{\partial r} v_{ij}(t_0))$$

решая которое относительно  $\Delta v$  легко получаем  $\Delta r_{ij}(t) = h(v_{ij}(t_0) + \Delta v_{ij}(t))$ .

Таким образом, шаг обратного метода состоит в вычислении  $F_0$ ,  $\partial F / \partial r$  и  $\partial F / \partial v$ , формировании и решении системы уравнений относительно  $\Delta v$  и последующем обновлении значений  $r$  и  $v$ . Использование неявного метода интегрирования приводит к большим разреженным линейным системам. Разреженные матрицы, представим в следующем виде. Для системы с  $n$  материальными точками рассматривается  $3*n \times 3*n$  матрица, чьи ненулевые элементы представлены как плотные матрицы скаляров, т.е. блоки размерности  $3 \times 3$ . Матрица представлена как массив  $3*n$  строк, каждая строка – список связей ненулевых элементов этой строки. Векторы, на которые умножаются матрицы, хранятся как  $n$ -мерные массивы. В матричном виде:  $A \Delta v = b$ , где

$$A = M - h \frac{\partial F}{\partial v} - h^2 \frac{\partial F}{\partial r},$$

$$b = h(F_0 + h \frac{\partial F}{\partial r} v(t_0)), M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},$$

вектор невязки  $\varepsilon = A \Delta v - b$ .

### 3. Технология и результаты моделирования

В качестве примера рассмотрим моделирование ткани на поверхности компьютерного манекена (моделирование стачивания одежды из плоских выкроек).

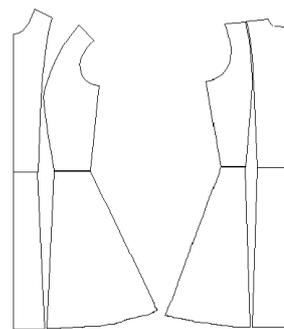


Рис.4. Выкройка для базовой модели.

**Этап 1.** Дискретизация выкроек. Т. к. стачиваемые выкройки имеют произвольную форму, то очевидно, что сетка представляющая ткань (выкройку) в общем случае должна быть неравномерной, так как после разбиения ткани на этапе стачивания швов могут образоваться дырки.

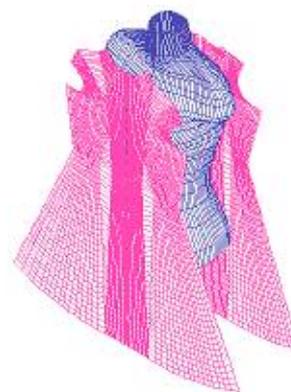


Рис. 5 Начальное расположение выкроек и манекена.

**Этап 2.** Стачивание швов. Для стачивания швов были установлены точки соответствия, и введены внешние силы аналогичные по действию силе тяжести и действующие в плоскостях  $x$   $y$   $z$ . Далее, временно исключалось действие сил тяжести на ткань, и соответствующие узлы начинали притягиваться. Пересечение горизонтальных и вертикальных линий будем называть «узловой точкой». Топологически каждая узловая точка соединяется с четырьмя равностоящими смежными узловыми точками. Алгоритм построен на том предположение, что разрез у нас является симметричным относи-

тельно центральной оси. Аппроксимацию разреза будем проводить ломаной линией. Переносим начало координат в точку, с которой начинается стачивание. Затем деталь поворачиваем вокруг оси *OZ* так, чтобы точки шва стали симметричными относительно оси *OY*. Набрасываем линии сгиба для каждой точки шва. На каждой линии сгиба выбираем точку, которая является вспомогательной точкой, так, чтобы она находилась на расстоянии от точки шва, сравнимом с расстоянием между точками шва.

**Этап 3.** Окончательное наложение. На последнем этапе было произведено включение внешней силы тяжести. Используя разработанный ранее механизм останковки, было произведено наложение. Конечный результат стачивания представлен на рис. 6.



Рис. 6. Результат наложения.

#### 4. Оценка деформаций ткани

Максимальное растяжение между соседними точками для явного метода Эйлера:

Кол-во итераций	Растяжение по горизонтали	Растяжение по вертикали
100	210.05 %	80.378 %
500	101.928 %	39.496 %
1000	57.897 %	27.198 %
2000	24.142 %	12.733 %

Максимальное растяжение между соседними точками для неявного метода:

Кол-во итераций	Растяжение по горизонтали	Растяжение по вертикали
100	133.197 %	110.767 %
500	18.004 %	8.539 %

Таблицы показывают, что при явном методе решения даже тысячи итераций недостаточно для реалистичного наложения. После двух тысяч итераций искажения становятся гораздо меньше. Если использовать неявный метод решения, для реалистичного наложения достаточно 500 итераций. Что касается временных затрат, то для 2000 итераций явного метода (модель состоит из 12000 узлов) требуется около трех часов, каждая итерация длится 3 – 5 секунд. Для 500 итераций неявного метода для той же модели требуется около одного-двух часов, каждая итерация длится 8 – 12 секунд (процессор Pentium III).

#### 5. ЛИТЕРАТУРА

[1] Eberhardt A., Weber A., Strasser W. A fast, flexible, particle-system model for clothes draping. IEEE Computer Graphics and Applications. № 16, 1996. P. 52-59.

[2] Kawabata S., Postle R., Niwa N. Objective Specification of Fabric Quality, Mechanical Properties and Performance, The Textile Mach. Soc. Japan Publications. 1982.

[3] Фроловский В.Д. Метод энергетических функций построения квазиразверток поверхностей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Том III. №1(5). С. 195-204.

#### Авторы:

Владимир Д. Фроловский, д.т.н., зав. кафедрой АСУ Новосибирского государственного технического университета. (НГТУ).

Наталья Н. Газизова, студентка НГТУ.

E-mai: vdf@interface.nsk.su

#### Introduction

In work on the basis of a method of particles in view of physical properties of a fabric the algorithm and programs for modeling behavior of a fabric on a surface of firm object is developed. For realization of iterative process at imposing a fabric the obvious and implicit methods were used. The comparison of computing expenses is given at these methods and estimation of deformations of a fabric as a result of imposing.

**Key words:** modeling of a fabric, method of particles, power functions, physical properties of a fabric.