

Перспективное Построение Отражений Объектов в Криволинейных Зеркальных Поверхностях

Николай М. Бородин, доцент каф. «Черчения, труда и методики»
Евгений В. Артемов, учитель черчения
Липецкий Государственный Педагогический Университет
Липецк, Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье анализируются результаты исследований о перспективном изображении объектов в криволинейных зеркальных поверхностях, полученных на кафедре «Черчения Труда и Методики» Липецкого Государственного Педагогического Университета.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Анализируя картины старых мастеров и современных художников приходим к выводу, что изображение отражений предметов быта в криволинейных зеркальных поверхностях (самоварах, чайниках, фаянсовой посуде и т.п.) выполнено не по законам линейной перспективы, а скорее всего из прямых наблюдений композиционного расположения объектов по отношению к криволинейной зеркальной поверхности. Поэтому возникла необходимость теоретически обосновать способы изображения отражений в криволинейных зеркальных поверхностях и экспериментально подтвердить обоснованность теоретических расчетов.

Под понятием «криволинейная зеркальная поверхность» мы подразумеваем все криволинейные поверхности линейчатого или нелинейчатого типа с зеркальным отражающим покрытием: прямые и наклонные цилиндры и конусы, сферы, торовые поверхности, поверхности вращения и т.д. В дальнейшем понятие «криволинейная зеркальная поверхность» для краткости заменим на понятие «кривое зеркало».

3. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ОТРАЖЕНИЙ В ПЕРДМЕТНО-ПРОЕЦИРУЮЩЕМ ЦИЛИНДРЕ ВРЕЩЕНИЯ

Цилиндрическое зеркало имеет двойкие свойства. В одном направлении, это свойства сферического зеркала, а в другом - плоского. Если в выпуклом сферическом зеркале расстояние от зеркала до предмета больше, чем расстояние от зеркала до его отражения, то в цилиндрическом это расстояние одинаково благодаря вмешательству свойств плоского зеркала. То есть в направлении, параллельном оси вращения цилиндра, пропорции длин сохраняются, а в направлении, перпендикулярном оси вращения размеры изменяются. Кроме того, отражения прямых - кривые линии. В случае вогнутого зеркала при предмете, удалённом от зеркала на расстояние, меньшее половины его диаметра, размеры в направлении, перпендикулярном оси вращения, увеличиваются. Если же предмет удалён от зеркала на расстояние, большее половины диаметра, то размеры в этом направлении уменьшаются.

Анализируя свойства цилиндрического зеркала, мы будем мысленно заменять его на катящееся по поверхности

цилиндра касательное плоское зеркало, которое в каждый момент движения представлено прямой линией касания. Это можно доказать, построив отражение точки на эмпоре Монжа.

Дано: горизонтально - проецирующий цилиндр Z и точка A (рис 1).

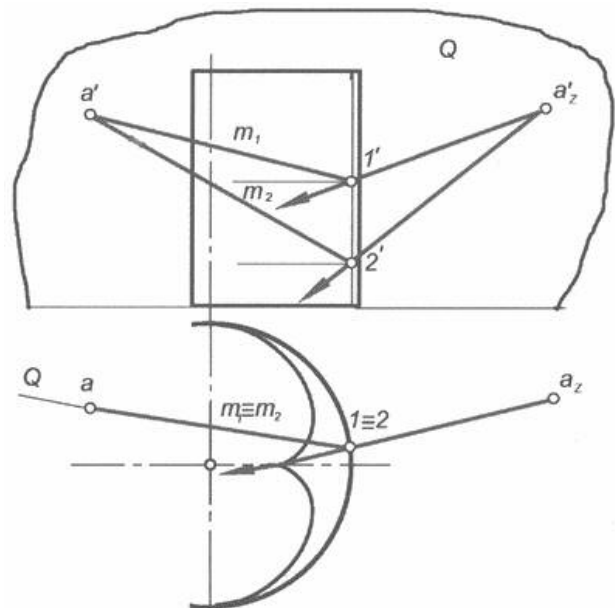


Рис. 1

1. Проведём через точку A лучи m_1 и m_2 , лежащие в горизонтально-проецирующей плоскости Q , до пересечения с цилиндрической поверхностью в точках 1 и 2 .

2. Через точки пересечения проведём горизонтальные плоскости, в которых построим нормали к точкам падения лучей.

3. Пользуясь свойством сохранения пропорций углов, отложим на горизонтальной и фронтальной проекциях углы $\alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \gamma_2$

4. Продлив отражённые лучи за зеркальную плоскость, мы получим отражение точки A - A_z .

Мы видим, что расстояние от точки A до зеркала равно расстоянию от зеркала до отражения этой точки (на горизонтальной проекции) (A_z).

Однако если мы построим третий луч n не принадлежащий плоскости Q (рис.2), то его отражение n_z будет скрещиваться с лучами m_1 и m_2 .

Таким образом, множество лучей, проходящих через точку A , образуют цилиндрическую поверхность, образующей которой является линия l .

Если через точку проводить лучи и находить места их пересечения, то получится бесчисленное множество отражений, причём пересекаются только лучи, лежащие в горизонтально - проецирующих плоскостях.

Как же всё-таки получить отражение точки?
 Оптика рассматривает отражение без учёта зрительного восприятия, мы же добавим в этот чертёж точку зрения S рис.3, представив глаз человека как камеру - обскуру. Чем

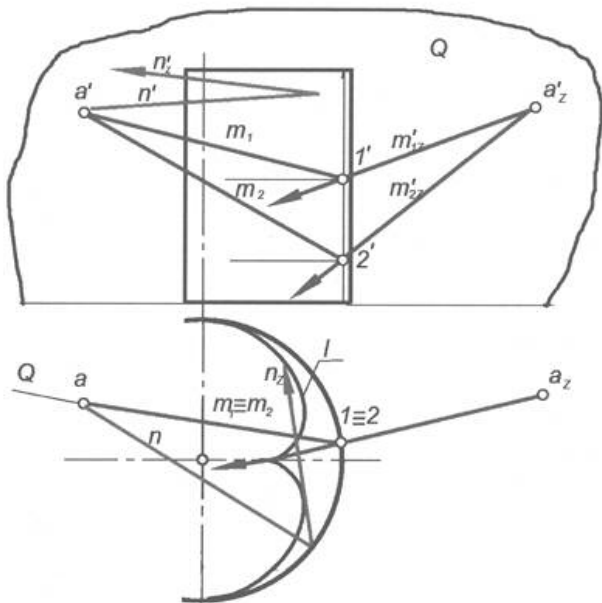


Рис. 2

меньше попадает лучей из точки Az, тем резче изображение на сетчатке. Пусть из точки A исходит пучок лучей, отражающихся от зеркала Z и попадающих в глаз. Если поставить условием стремление числа лучей к одному, то угол между лучами с вершиной в точке A будет стремиться к нулю. Следовательно, область пересечения отражённых лучей будет отдаляться от зеркала. Но, благодаря свойству плоского зеркала, в вертикальном сечении цилиндра расстояние от точки до зеркала и от зеркала до отражения этой точки будет сохраняться равным.

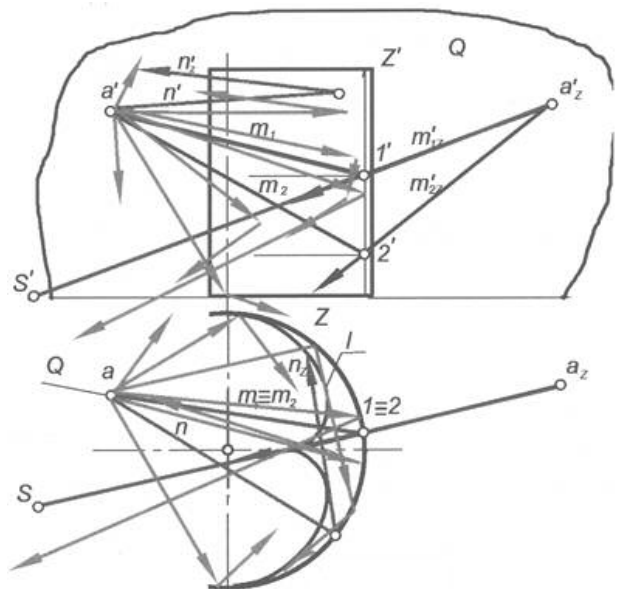


Рис. 3

Возьмём другую точку зрения S₁ (рис.4). Для построения отражения точки, исходя из вышеизложенного, достаточно построить отражение одного луча и отложить на нём расстояние, равное расстоянию от точки A до зеркала Z.

Таким образом, получится второе отражение точки A – A_{1z}. Из этого сделаем выводы:

1. Положение отражения точки в кривом зеркале, представленном поверхностью цилиндра вращения, зависит от точки зрения.
2. Глаз воспринимает минимальное число лучей, стремящихся к одному (центральному), поэтому расстояние от зеркала до отражения точки определяется свойствами плоского зеркала в направлении, параллельном оси вращения цилиндра.
3. Для построения отражения точки достаточно на продолжении отражённого луча за зеркальной плоскостью отложить расстояние от точки падения, равное длине отрезка между данной точкой и точкой падения. Глаз человека воспринимает только мнимое отражение. Поэтому эти правила действительны как для выпуклого так и для вогнутого зеркала. В перспективе удобнее всего строить отражение методами Дюрера и гомологии.

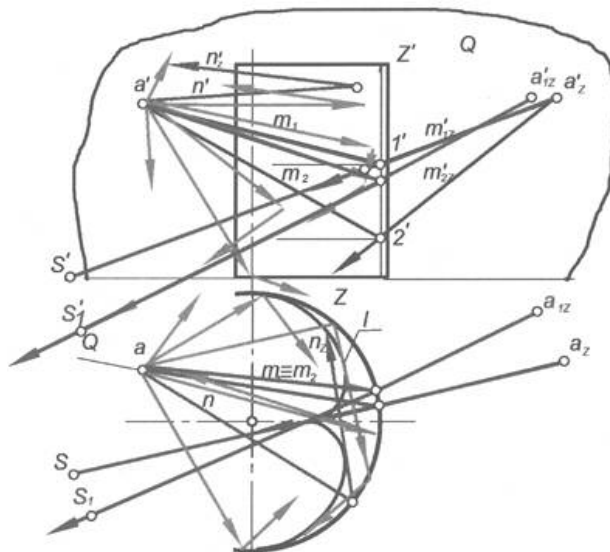


Рис. 4

3.1 ПОСТРОЕНИЕ ОТРАЖЕНИЙ «МЕТОДОМ ДЮРЕРА»

Для построения отражений не обязательно находить расстояние от зеркала до отражения: перспектива в своей основе берёт один глаз, то есть монокулярное зрение, и проецирующие лучи попадая на картинную плоскость оставляют точечный след, следовательно, отмерять расстояние на проецирующих лучах не имеет смысла.

В жизни мы определяем расстояние до предмета с помощью бинокулярного аппарата. На двухмерном листе невозможно отобразить сразу две зрительных проекции (за исключением специальных стереоскопических методов), поэтому в линейной перспективе приняты вторичные проекции на предметную плоскость, называемые основаниями точек.

Для построения отражения «методом Дюрера» достаточно проследить ход лучей: точка => зеркало => картинная плоскость => глаз, как для самих точек, так и для их основания.

Рассмотрим пример. Для облегчения построений зададим следующее условие: возьмём прямую, на которой будем произвольно получать точки.

Дано: предметно - проецирующее цилиндрическое выпуклое круговое зеркало Z, прямая AD (рис. 5) .

1. Проведём на горизонтальной проекции из точки s произвольный пучок лучей до зеркальной поверхности.
2. С помощью нормалей или кривой мгновенных фокусов строим отражённые лучи (для упрощения изображения вспомогательные линии построения отражённых лучей не показаны).
3. Отметим пересечение отражённых лучей с прямой ad буквами b, c, d и пересечение проецирующих падающих лучей с картинной плоскостью K буквами b_z, c_z, d_z .

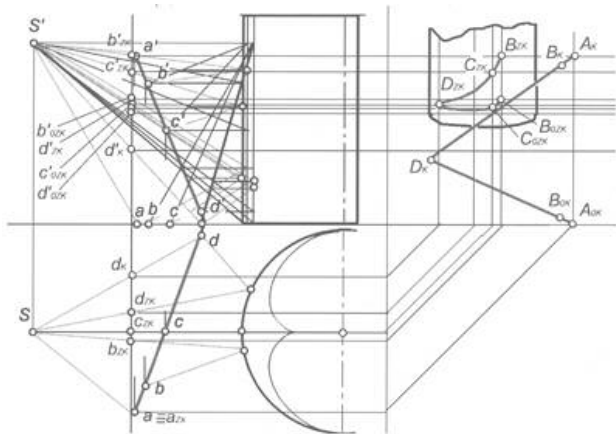


Рис. 5

4. Теперь перейдем к фронтальной проекции. Спроецируем точки падения на фронтальную проекцию, они преобразуются в прямые, представляющие собой мгновенное положение катящейся зеркальной плоскости Z_1, Z_2, Z_3 .
5. Теперь найдём точки падения на фронтальной проекции. Для этого мы проведём перпендикуляры из точек S^1 и b^1 к Z_1 . Проведём диагонали получившейся трапеции $S^1 b^1 b_p^1 S_p^1$. Из точки пересечения диагоналей проведём перпендикуляр к Z_1 . Пересечение перпендикуляра с Z_1 будет являться точкой падения луча. Аналогичным образом находятся точки падения проецирующих лучей из точек c^1 и d^1 , и их оснований.
6. Найдём, точки пересечения проецирующих отражённых лучей с картинной плоскостью K ; получаем $b_{zk}^1, d_{zk}^1, b_{0zk}^1, d_{0zk}^1$.
7. Добавляем к полученным проекциям отражений проекции точек $a_k^1, d_k^1, a_{0k}^1, d_{0k}^1$ на фронтальной проекции, $ak \equiv a_{0k}, dk \equiv d_{0k}$
8. С помощью проекционных связей строим перспективу.

Этот метод является наиболее точным, но достаточно трудоёмок и малонагляден, поэтому на практике удобнее пользоваться методом гомологии.

3.2 ПОСТРОЕНИЕ ОТРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ ГОМОЛОГИИ

Отражение, построенное методом гомологии, обусловим заменой цилиндрической зеркальной поверхности катящимся плоским зеркалом.

Рассмотрим Построение отражений методом гомологии на примере отражения точки как в выпуклом, так и в вогнутом зеркале.

Дано: выпуклое предметно - проецирующее цилиндрическое круговое зеркало Z , точка A (рис. 6).

1. Проведём прямые, соединяющие точки D_3 и $A \equiv a$ с центром окружности O .
2. Проведём диагонали получившегося четырёхугольника AD_312 и соединим точку их пересечения с центром

окружности O нормалью n (по определению нормали окружности). Точка пересечения окружности и нормали 3 будет являться точкой падения проецирующего луча.

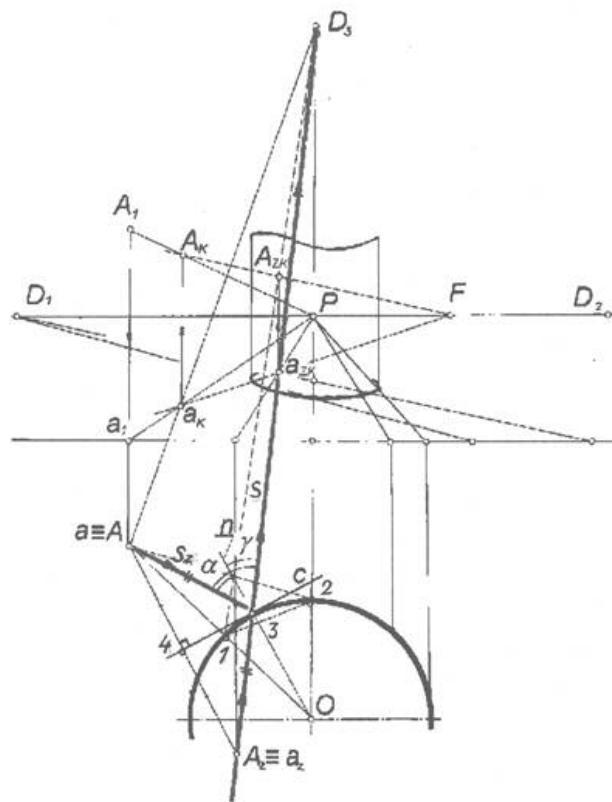


Рис. 6

3. Перпендикулярно нормали через точку падения 3 проведём касательную c .
 4. Отложим на луче s отражение точки A точку $Az \equiv az$ на расстоянии от касательной, равном расстоянию от точки A до касательной. Получилось два равных прямоугольных треугольника (по двум сторонам и углу между ними). Из этого видно, что отрезок падающего луча $Az = Azz$; поэтому далее можно не прибегать к построению касательной плоскости.
 5. С помощью построений метода гомологии получаем изображение основания точки a и её отражения a_{zk} .
 6. Пользуясь методом боковой стенки и используя свойства цилиндрического зеркала сохранять отношения высот, построим перспективу точки A_k и её отражения A_{zk} .
- Аналогичным образом построим отражение точек A и B в вогнутом зеркале (рис. 7). Рассмотрим особенности:
- Точка A , расположенная на картине справа от оси цилиндра отражается в противоположной от неё стороне, то есть отражённое изображение этой точки перевёрнуто. Так как точка A лежит дальше фокусного расстояния, это построение совпадает с данными геометрической оптики.
 - Точка B лежит ближе фокуса от поверхности зеркала и отражается два раза: первый раз отражением является точка B_z , лежащее в той же стороне, что и точка B относительно оси цилиндра. Второй раз отражением точки B является точка B_{z_2} , причём луч, многократно отражаясь, проходит сложный путь, образуя по пути промежуточные отражения точки $B_{1z} \dots B_{4z}$. Если на продолжении лучей, проходящих через эти точки, взять точки зрения, отличные от заданной, то становится понятно, насколько отражение зависит от точки зрения.

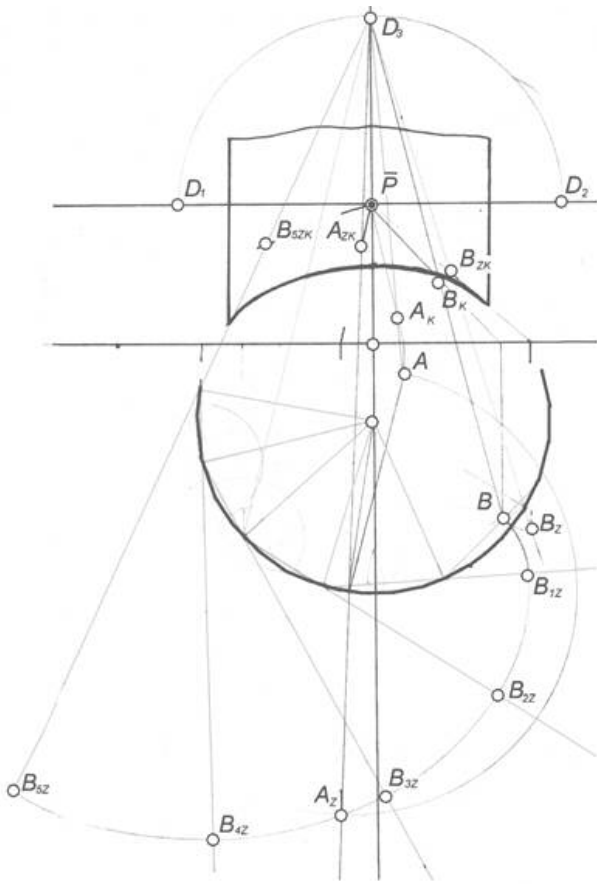


Рис. 7

4. ВЫВОДЫ

В процессе работы решен ряд задач:

1. Поставлен визуальный эксперимент и проанализированы формы отражений в вертикальном цилиндре вращения.
2. Проанализированы и синтезированы данные геометрической оптики и линейной перспективы.
3. Классифицированы «кривые зеркала».
4. Обоснованы способы построения касательной плоскости и нормалей к кривым поверхностям.

5. Для ряда поверхностей обоснован наиболее простой способ построения нормалей с помощью эволют.
6. Проанализированы свойства «зазеркального» мнимого пространства для вогнутого и выпуклого вертикального цилиндра вращения.
7. Разработаны задачи на построение отражений на поверхности предметно - проецирующего цилиндра вращения.
8. Создан видеофильм по материалам исследования.

Об авторах

Николай М. Бородин, доцент каф. «Черчения, труда и методики», Липецкий Государственный Педагогический Университет, Липецк, Россия
e-mail: beard@lipetsk.ru

Евгений В. Артемов, учитель «ИЗО и черчения»
Липецкий Государственный Педагогический Университет,
Липецк, Россия